Capítulo 2 Questões teóricas:

1. Defina experiência aleatória. Dê exemplos de experiências aleatórias associadas a espaços de resultados discreto finito, discreto mas infinidade numerável e contínuo.

2. Defina espaço de resultados de uma experiência aleatória. Dê um exemplo de uma experiência aleatória e defina o espaço de resultados associado. Classifique-o.

3. Um espaço de resultados discreto é sempre finito? Comente com apoio de exemplos.

4. Defina espaço de resultados contínuo. Dê dois exemplos de experiências aleatórias cujo espaço de resultados seja contínuo.

5. Considere a experiência aleatória retirada de uma carta de um baralho até sair uma carta de espadas. Defina o espaço de resultados associado a esta experiência e classifique-o.

6. Considere o lançamento de duas moedas equilibradas. Qual o espaço de resultados desta experiência aleatória? Classifique o espaço de resultados. Justifique.

7. Defina medida de probabilidade e comente a sua utilidade.

8. Quais os axiomas verificados pela medida de probabilidade $P(A)$?

9. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P[acontecimento \text{ "}impossível\text{"}] = 0$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

10. Utilizando os axiomas da medida de probabilidade demonstre que $P(A) \leq 1$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

11. Utilizando os axiomas da medida de probabilidade demonstre que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

12. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

13. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

14. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.
    [Sugestão: tenha em consideração que $A \cup B = A \cup (B - A)$]

15. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.
    [Sugestão: tenha em consideração que $A \cup B = A \cup (B - A)$]

16. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$ Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar.

17. Sejam A, B e C acontecimentos de $\mathbf{\Omega}$ com probabilidade positiva. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$ Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar. [Sugestão: tenha em consideração que $A \cap B = A \cap B \cap \boldsymbol{\Omega}$ e $C \cup \bar{C} = \boldsymbol{\Omega}$]

18. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que se A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar. [Sugestão: tenha em consideração as leis de De Morgan]

19. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que se A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$. Use um diagrama de Venn para o ajudar a pensar. [Sugestão: tenha em consideração as leis de De Morgan]

20. Sejam A e B, acontecimentos de um espaço de resultados com probabilidade positiva. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P(A) \leq P(B)$. Use um diagrama de Venn para apoiar a sua resposta.

21. Utilizando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade demonstre que $P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = P(A)$

22. Use um diagrama de Venn para demonstrar que $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$. Calcule $P[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})]$ usando os axiomas e propriedades da medida de probabilidade.

23. Descreva o problema que o esquema binomial permite resolver e as condições em que é aplicável? Se necessário, utilize um esquema para apoiar a sua descrição.

24. Descreva o problema que o esquema hipergeométrico permite resolver e as condições em que é aplicável? Se necessário, utilize um esquema para apoiar a sua descrição

25. Sejam A e B, acontecimentos incompatíveis de um espaço de resultados com probabilidade positiva. Mostre, justificando com os axiomas e propriedades da medida de probabilidade a que é igual a $P(A \cup B)$. [Sugestão: faça $A \cup B = A \cup (B - A)$].

26. Sejam A e B, acontecimentos de um espaço de resultados com probabilidade positiva. Se $A \subset B$, mostre, justificando devidamente, todos os passos a que é igual a $P(A \cup B)$.

27. Defina P_n e explique como chega à respectiva fórmula de cálculo . Dê um exemplo de um problema para a resolução do qual necessite de usar este método de contagem.

28. Para escolher o método de contagem adequado a uma dada experiência aleatória que tipo de informação é necessário ter em consideração?

29. Em que condições se tem de recorrer à interpretação subjectiva da probabilidade? Dê um exemplo em que tal aconteça.

30. Em que condições se pode aplicar o conceito clássico de probabilidade?

31. Quais as principais criticas feitas ao conceito clássico de probabilidade?

32. Considere a experiência aleatória lançamento de um dado. Como é que a interpretação frequencista da probabilidade atribui probabilidade ao acontecimento saída de face com 4 pontos?

33. Se se lançar um dado 10 vezes e não sair nenhum 6 pode concluir-se que o dado não é equilibrado. Comente. Indique qual a interpretação do conceito de probabilidade que fundamenta a sua resposta.

34. Se se lançar um dado 10000 vezes e não sair nenhum 6 pode concluir-se que o dado não é equilibrado. Comente. Indique qual a interpretação do conceito de probabilidade que fundamenta a sua resposta.

35. conceito frequencista de probabilidade ultrapassou as críticas feitas ao conceito clássico de probabilidade.

36. Supondo que um acontecimento B se realiza e que A e B são independentes, prove que $P(A|B) = P(A)$? Justifique todos os passos.

37. Prove que o axioma 1 da medida de probabilidade é satisfeito pela probabilidade condicionada, isto é, que se $P(B) \neq 0$, então $P(A|B) \geq 0$. Justifique todos os passos.

38. Prove que o axioma 2 da medida de probabilidade é satisfeito pela probabilidade condicionada, isto é, que se $P(B) \neq 0$, então $P(B|B) = 1$. Justifique todos os passos.

39. Prove que o axioma 3 da medida de probabilidade é satisfeito pela probabilidade condicionada, isto é, que se $P(B) \neq 0$ e A_1, A_2 são acontecimentos mutuamente incompatíveis então $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1|B) + P(A_1|B)$. Justifique todos os passos.

40. Dados 3 acontecimentos $A, B, C \subset \Omega$, tais que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$ e $P(C|A \cap B) = P(C|B)$, mostre que $P(A|B \cap C) = P(A|B)$. Justifique todos os passos.

41. Dados 2 acontecimentos $A, B \subset \Omega$, tais que $P(B \backslash A) = P(A)$, mostre que $P(A|B) = P(A)$. Justifique todos os passos.

42. Dados 3 acontecimentos independentes $A, B, C \subset \Omega$, mostre que A e $B \cap C$ também são independentes. Justifique todos os passos.

43. Dados 3 acontecimentos independentes $A, B, C \subset \Omega$, mostre que A e $B \cup C$ também são independentes. Justifique todos os passos.

44. Se A_1, A_2, A_3 são acontecimentos mutuamente incompatíveis e tais que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ e o acontecimento C é tal que $C \cap A_i \neq \emptyset \quad i = 1,2,3$. Demonstre o teorema de probabilidade total do acontecimento C . Justifique todos os passos

45. Se A_1, A_2, A_3 são acontecimentos mutuamente incompatíveis e tais que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ e o acontecimento C é tal que $C \cap A_1 \neq \emptyset$ e $C \cap A_i = \emptyset \quad i = 2,3$. Determine a expressão de cálculo da probabilidade do acontecimento C . Justifique todos os passos.

46. Sejam A e B, acontecimentos de um espaço de resultados, tais que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cap B) = 0.1$. O que pode concluir acerca da independência entre A e B? Justifique devidamente.

47. Se $P(A) = 0.55, P(B) = 0.45, P(A - B) = 0.25$ então A e B constituem uma partição do espaço de resultados. Comente a afirmação, justificando devidamente.

48. Se $P(A) = 0.55, P(B) = 0.45, P(A - B) = 0.55$ então A e B constituem uma partição do espaço de resultados. Comente a afirmação, justificando devidamente.

49. Sejam A_1, A_2, A_3 acontecimentos de um espaço de resultados Ω, com probabilidade positiva. Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3$, A_1, A_2, A_3 podem constituir uma partição do espaço de resultados? Justifique devidamente.

50. Mostre, justificando todos os passos, que se A é um acontecimento de um espaço de resultados com probabilidade positiva, A e $\bar{A}$ constituem uma partição do espaço de resultados.

51. Dois acontecimentos incompatíveis podem ser independentes. Comente justificadamente.

52. Sejam A_1, A_2 acontecimentos de um espaço de resultados Ω, com probabilidade positiva. Se $A_1 \subset A_2$, usando a definição de acontecimentos independentes, mostre que A_1, A_2 não podem ser independentes.

53. Demonstre que, no contexto do teorema de Bayes, a soma das probabilidades condicionadas de cada um dos elementos da partição do espaço de resultados $A_j \ _{(j=1,2,3)}$ pelo acontecimento B é sempre igual a 1. Utilize um diagrama de Venn para apoiar a sua explicação.

54. Mostre que o espaço de resultados Ω é independente de qualquer outro acontecimento $A \subset \Omega$.

55. Mostre que o acontecimento “impossível” é independente de qualquer outro acontecimento $A \subset \Omega$.